

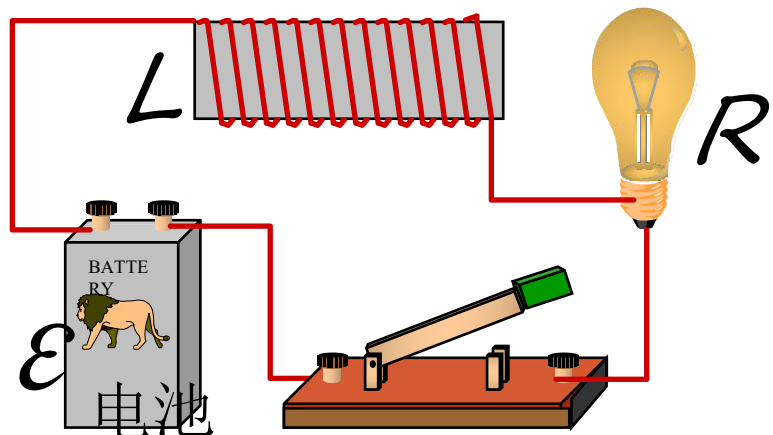
§ 11-4

磁场的能量

磁场能量密度

接通电源，电流从 0 增加到 I

考虑下面的回路



$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$\mathcal{E}_L$

回路总电阻

$$\mathcal{E} Idt - L IdI = RI^2 dt$$

$$\int_0^t \mathcal{E} Idt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

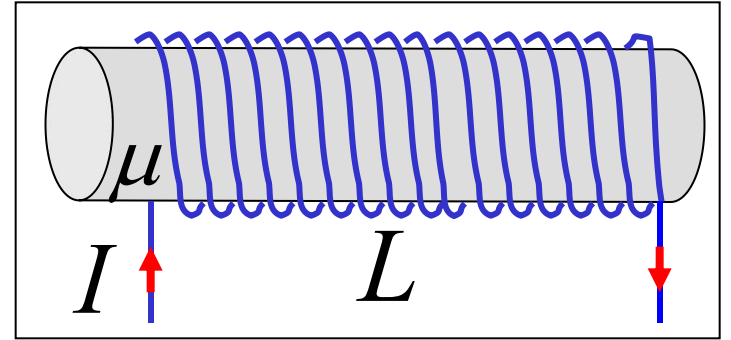
电源
做功

电源反
抗自感
电动势
作的功

回路电
阻所放
出的焦
耳热

◆ 自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$



$$L = \mu n^2 V, \quad B = \mu n I$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = w_m V$$

◆ 磁场能量密度
矢量式

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

与电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ 比较

◆ 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

◆ 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

磁场所储存的总能量：

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} dV$$

积分应遍及磁场存在的全空间。

● 电磁场的能量密度：

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

电场能量密度

磁场能量密度

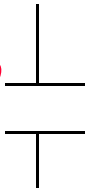
电磁场的总能量：

$$W = \int_V w dV$$



静电场

能量保存
在器件中

C  $W_e = \frac{1}{2} C U^2$

通过平板电容器得出下
述结论



存在场中
能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$W = W_e + W_m$$

稳恒磁场

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$



通过长直螺线管得出
下述结论



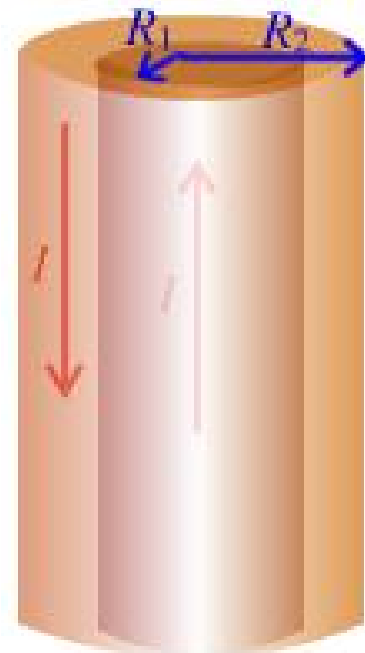
$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

普遍适用

各种电场 磁场

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

练习1： 有一电缆，由两个无限长的同轴圆筒状导体所组成，内筒和外筒上的电流流向相反而强度 I 相等。设内、外圆筒横截面的半径分别为 R_1 和 R_2 ，试计算长为 l 的一段电缆内的磁场所储藏的能量。



解法一 内、外两圆筒之间的区域内离开轴线的

距离为 r 处的磁感强度为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

在该处的磁场能量密度为 $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$

在半径为 r 与 $r+dr$ 、长为 L 的两个圆柱面所组成的体积元 dV 内，

磁场的能量为 $dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r L dr = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \frac{dr}{r}$

对上式积分，可得内、外圆筒之间磁场内储藏的总磁能

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解法二 磁场能量也可用 $W_m = L I^2 / 2$ 计算。

前面我们计算得到同轴电缆单位长度的自感系数为

$$L = \frac{\Phi_m}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此，同轴电缆单位长度的自感磁能为

$$W'_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

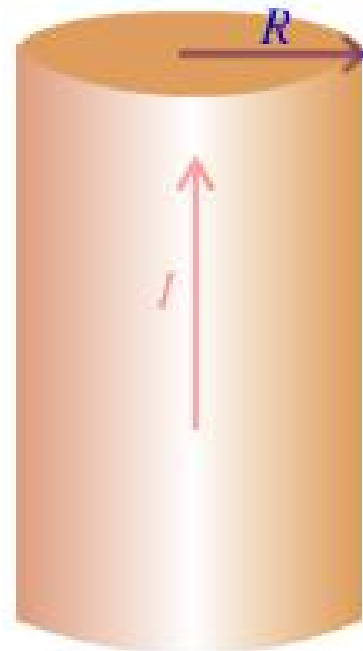
那么，长度为 l 的一段同轴电缆的自感磁能为

$$W_m = W'_m l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

练习2： 设电流 I 均匀地通过一半径为 R 的无限长圆柱形直导线的横截面。

(1) 求导线内的磁场分布；

(2) 求证： 每单位长度导线内所储存的磁场能量
为 $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$



解： 电流 I 均匀地分布在无限长圆柱形直导线的横截面上，通过导线横截面的电流密度为 $j = \frac{I}{\pi R^2}$

电流的分布具有轴对称性。今在圆柱形直导线内取逆时针绕向、半径 $r < R$ 的同轴圆形环路，按安培环路定理，有

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} (\pi r^2) = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

证明： 由分析知圆柱形直导线内的磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

导线内的磁场能量密度为 $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$

取一段长为 l 的导线，并在 r 处取 dr 厚的同轴圆柱壳，则此壳内的磁场能量为

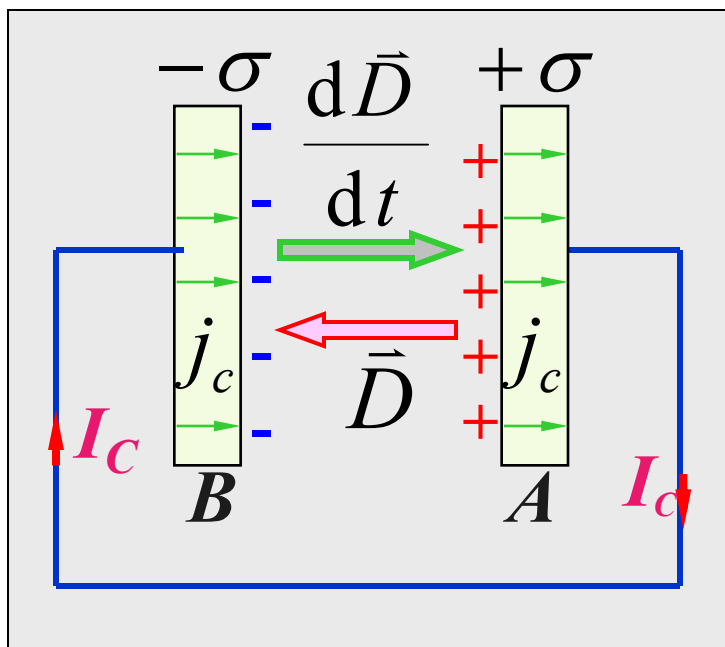
$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} l dr$$

整个长度为 l 的圆柱形导线内的磁场能量为

$$W_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

单位长度的导线内储存的磁场能量为

$$W'_m = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$



$$I_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(S\sigma)}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

$$j_c = \frac{d\sigma}{dt} \quad D = \sigma \quad \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\Psi = SD \quad I_c = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

麦克斯韦假设 电场中某一点位移电流等于该点电位移矢量通量对时间的变化率。

◆ 位移电流密度

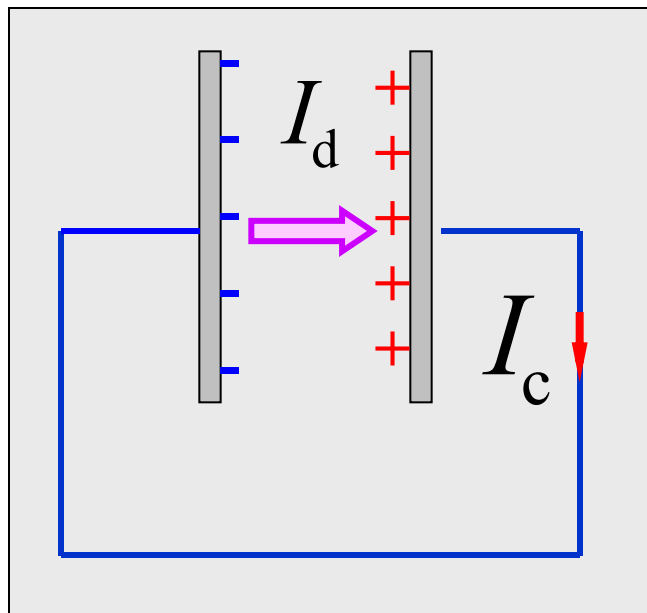
$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

◆ 位移电流密度

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

◆ 位移电流

$$I_d = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{d\psi}{dt}$$

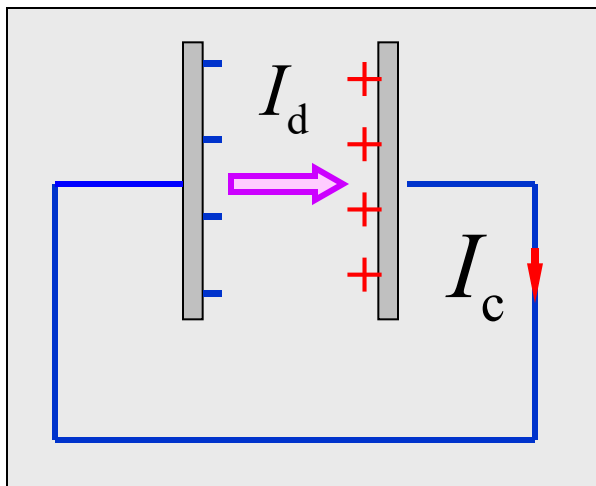


通过电场中某一截面的位移电流等于通过该截面电位移通量对时间的变化率。



全电流

$$I_s = I_c + I_d$$



◆ 全电流

$$I_s = I_c + I_d$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_s = I_c + \frac{d\psi}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

- 1) 全电流是连续的;
- 2) 位移电流和传导电流一样激发磁场;
- 3) 传导电流产生焦耳热, 位移电流不产生焦耳热.

练习1：一半径为 R 的圆形平行板电容器，与交流电源相连，极板上电荷量随时间的变化关系为 $q=q_0\sin\omega t$ ，忽略电容器的边缘效应。试求两极板间位移电流密度的大小。

解：对于平行板电容器，极板间电位移的大小为

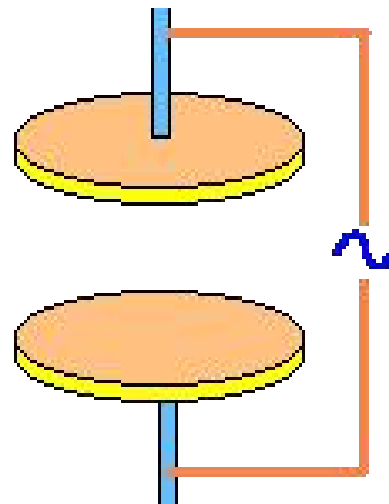
$$D = \sigma = \frac{q}{S}$$

电容器极板上带电量 $q=q_0\sin\omega t$ ，极板面积 $S=\pi R^2$ ，故

$$D = \frac{q_0}{\pi R^2} \sin \omega t$$

那么两极板间位移电流密度的大小为

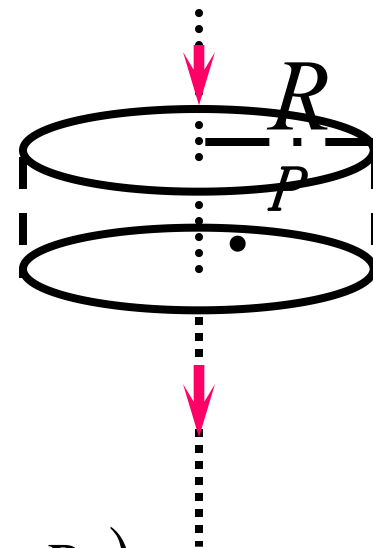
$$j_D = \frac{dD}{dt} = \frac{q_0\omega}{\pi R^2} \cos \omega t$$



练习2 平板电容器 均匀充电

$$\frac{dE}{dt} = c \quad \text{板半径为 } R$$

内部充满介质 $\epsilon \quad \mu$



求: 1) I_d (忽略边缘效应) 2) $\vec{B}_P (r \ll R)$

解:
$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} (D \pi R^2) = \epsilon \frac{dE}{dt} \pi R^2$$

$$\frac{dE}{dt} > 0 \quad I_d \text{ 方向 } \downarrow$$

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad I_d \text{ 方向 } \uparrow$$

2) 过P点垂直轴线作一圆环

等效为位移电流均匀通过圆柱体

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = \sum_{\text{内}} I_d$$

$$\sum_{\text{内}} I_d = \pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$$H = \frac{\varepsilon r}{2} \frac{dE}{dt}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu \varepsilon r}{2} \frac{dE}{dt}$$

